

TD₁₆ – Intégrales à paramètre**Exercice 1** ★★

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F . Étudier la parité de F .
2. Montrer que F est continue sur son ensemble de définition
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur D_F et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F et en déduire une expression simple de $F(x)$

Exercice 2 ★★

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}(xt)e^{-t^2} dt$.

1. Montrer l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Étudier la parité de F .
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (on pourra utiliser une domination locale), et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F et en déduire une expression simple de $F(x)$ On pourra utiliser le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 ★★

On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . (on pourra utiliser une domination locale)
2. Montrer que F est monotone.
3. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 0. On commencera par justifier que pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{x}\right]$,

$$e^{-tx} \geq 1 - tx \geq 0.$$

Donner l'allure de la courbe.

Exercice 4 ★★★

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$ (on pourra utiliser une domination locale).
3. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ (on pourra utiliser une domination locale) sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

4. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$ (i.e. $\Gamma'' \geq 0$).
5. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

7. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5 ★★★★★

On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+x} dt$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, $I_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+x} dt \geq 0$. En déduire que F est positive sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin ux}{1+u} du$. En déduire que F est impaire, de classe \mathcal{C}^1 , et calculer sa dérivée.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 6 ★★★★★

On pose $F(x) = \int_0^1 e^{tx} \sqrt{1-t^2} dt$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F , puis montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D}_F . Donner une expression intégrale de $F^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1 , puis chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
3. En déduire le développement limité à l'ordre 3 de F en 0, puis l'allure de la courbe de F en ce point.
4. Préciser le sens de variation de F sur \mathcal{D}_F , puis déterminer les limites aux bornes. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 7 ★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur \mathbb{R} . On pose :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt.$$

La fonction \hat{f} est appelée transformée de Fourier de f .

1. Démontrer que \hat{f} est définie, continue et bornée sur \mathbb{R} .
2. On considère désormais la fonction f définie par $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Montrer que \hat{f} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
3. Calculer \hat{f}' et en déduire la valeur de f . On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8 ★★★★★

Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = \int_0^1 \sqrt{x+t^3} dt$.

Exercice 9 ★★★★★

Soit f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que $f(x)$ est bien définie
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ (on pourra utiliser une hypothèse de domination locale) et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$.

3. Étudier les variations de f , ses limites et tracer son graphe.
4. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre. En déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice 10 ★★

Soit f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $f' + g' = 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 11 ★★★★★

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(\theta) = \ln(1 - \sin(\theta)^2)$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + t \times \sin(\theta)^2) d\theta$$

- (a) Montrer que F est bien définie et est continue sur $[-1, +\infty[$
- (b) Établir que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ et que

$$\forall t \in]-1, +\infty[\quad F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t \times \sin(\theta)^2} d\theta$$

3. (a) En posant le changement de variable $u = \tan(\theta)$, montrer que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$,

$$F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})}$$

- (b) En déduire que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$,

$$F(t) = \pi \times (\ln(1 + \sqrt{1+t}) - \ln(2))$$

Exercices issus d'oraux

Exercice 12 ★★★

(Oral 2018)

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $s(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \int_0^x s(t) dt$.

Enfin pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-xt} dt$.

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que s est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 et bornée sur \mathbb{R} .
2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
3. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.
4. En déduire que f est définie sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
6. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. On pourra commencer par le faire sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
7. Calculer $f(x)$.
8. En admettant la continuité de f en 0, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

Exercice 13 ★★★

(Oral 2014, 2018)

Pour $x \in]-1, +\infty[$, on définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et déterminer le sens de variations de f .
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3(1-t+t^2)}$$

et en déduire la valeur de $f(0)$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .
5. En déduire f .

Exercice 14 ★★★

(Oral 2008)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $T(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_0^1 f(tx) dt$$

1. Montrer que l'application T ainsi définie est un endomorphisme de E
2. Déterminer les éléments propres de T .